المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية

د. منير الترك

رياضيات 3

المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية

تعريف المؤثر اللابلاسي ∇^2 (لابلاسيان)

لنطبق على $\vec{\nabla}.u$ مرة أخرى $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.u) = \overrightarrow{div}\,(\overrightarrow{grad}.u)$$

$$\nabla^2.u = \frac{\delta 2u}{\delta x^2} + \frac{\delta 2u}{\delta y^2} + \frac{\delta 2u}{\delta z^2}$$

نسمي ∇^2 باللابلاسيان وهو مؤثر على التوابع العددية و الشعاعية

$$\nabla^2 = \frac{\delta 2}{\delta x^2} + \frac{\delta 2}{\delta y^2} + \frac{\delta 2}{\delta z^2}$$

مثال(1):

احسب لابلاسيان التابع

$$1)\ u = x^2 - y^2 + xyz$$

$$\nabla^2.u = 2 - 2 = 0$$

$$2)\ u = x^2 - 2y + x^2 z$$

$$\nabla^2.u = 2 + 2y$$

ومنه نستنتج التعريف التالي: u تابع توافقي $\nabla^2 . u = 0 \Leftrightarrow$

التفرق الدوراني لتابع $\vec{F}(f_x, f_y, f_z)$

$$\overrightarrow{div}(\overrightarrow{rot.f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge 0 = 0$$

ومنه تفرق تابع شعاعي يساوي الصفر

مثال:

اذا كان $\vec{F}$ هو عبارة عن حقل شعاعي كموني (محافظ) وهو أيضا حقل شعاعي لولبي بان واحد

احسب كمونه العددي وماذا نستنتج

الحل:

بما أن $\vec{F}$ كموني فهو يكتب تفرق لتابع عددي u

$$\vec{F} = \vec{\nabla}.u$$

بالتعويض $\vec{\nabla}.\vec{F} = 0 \Leftrightarrow$ تابع لولبي$\vec{F}$

$$\nabla^2 . u = 0$$

$\nabla^2 . u = 0 \Leftrightarrow$ تابع توافقي ايضا$\vec{F}$

سؤال دورة: هام جدا

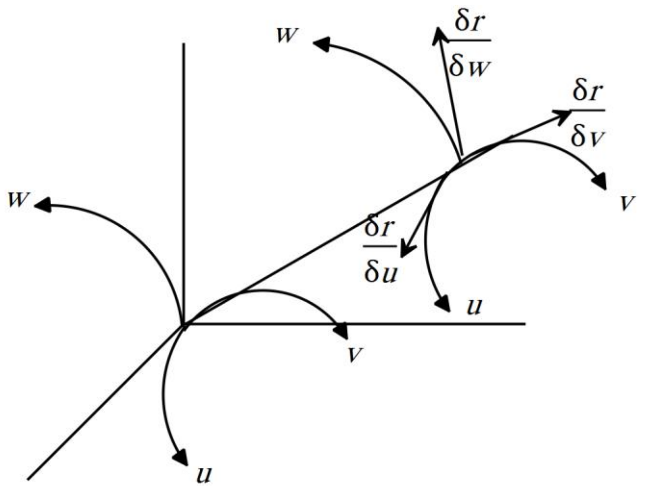
طلب الاستنتاج كاملا

أوجد المشتقات الشعاعية في الاحداثيات المنحنية *(u,v,w)* والاحداثيات الاسطوانية و الكروية مع الرسم:

تذكرة:

الاحداثيات الاسطوانية تابعة ل (r,θ,z)

معادلاتها:



$$x = rCOS(\theta)$$
$$y = rSin(\theta)$$
$$z = z$$

الاحداثيات الكروية تابعة ل (r,θ,φ)

معادلاتها:

$$x = rSin(\theta)COS(\varphi)$$
$$y = rSin(\theta)Sin(\varphi)$$
$$z = rCOS(\theta)$$

الاحداثيات المنحنية تابعة ل (u,v,w)

$$u = u(x,y,z)$$
$$v = v(x,y,z)$$
$$w = w(x,y,z)$$

تختلف الاحداثيات المنحنية عن الاحداثيات الديكارتية بأنها يمكن أن تتحرك مع النقطة المادية *M*

و إذا رمزنا لمتجهات الواحدة $\hat{u}$ **نجد:**

$$\hat{u} = \frac{\frac{\delta \vec{r}}{\delta u}}{\left|\frac{\delta r}{\delta u}\right|}$$

$$\hat{v} = \frac{\frac{\delta \vec{r}}{\delta v}}{\left|\frac{\delta r}{\delta v}\right|}$$

$$\hat{w} = \frac{\frac{\delta \vec{r}}{\delta w}}{\left|\frac{\delta r}{\delta w}\right|}$$

و الأن المطلوب حساب التدرج و التفرق و الدوران و الابلاسيان للإحداثيات المنحنية و الاسطوانية و الكروية:

ملاحظة: الرجاء الانتباه بأن العلاقات التالية تحوي على u وهي مركبة النقطة U و الرجاء عدم الخلط بين الاثنين

كما الرجاء الانتباه الى التفاضل الجزئي δ و التفاضل الكلي d

لنبدأ بالاحداثيات المنحنية (تابع عددي)

لنحسب التدرج بالتفصيل ويحسب الباقي بالمثل بالنسبة لباقي الاحداثيات المطلوبة:

والان لنكتب التفاضل الكلي ل U

$$dU = \frac{\delta U}{\delta u} d(u) + \frac{\delta U}{\delta v} d(v) + \frac{\delta U}{\delta w} d(w)$$

ولنكتب الان الشعاع $\vec{r}$ **بدلالة** (u, v, w)

$$d\vec{r} = \frac{\delta r}{\delta u} d(u) + \frac{\delta r}{\delta v} d(v) + \frac{\delta r}{\delta w} d(w)$$

و لنكتب تدرج $\vec{\nabla}.U(u, v, w)$

$$\vec{\nabla}.U(u, v, w) = \lambda_u \hat{u} + \lambda_v \hat{v} + \lambda_w \hat{w}$$

إذا الان علينا حساب كل من $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$

لنعود الان الى شعاع التوجيه ونكتب:

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta u} = |\frac{\delta \vec{r}}{\delta u}|\hat{u} \Rightarrow h_u \hat{u}$$

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta v} = |\frac{\delta \vec{r}}{\delta v}|\hat{v} \Rightarrow h_v \hat{v}$$

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta w} = |\frac{\delta \vec{r}}{\delta w}|\hat{w} \Rightarrow h_w \hat{w}$$

و بالعودة الى $d\vec{r}$ و بالتعويض نحصل على:

$$d\vec{r} = h_u \hat{u} du + h_v \hat{v} dv + h_w \hat{w} dw$$

ونعلم أن علاقة التدرج تفاضل تام هي:

$$dU = \vec{\nabla}.U d\vec{r}$$
$$dU = h_u \lambda_u du + h_v \lambda_v dv + h_w \lambda_w dw$$

والان نعود الى التفاضل التام لـU ونقارنها:

$$\frac{\delta U}{\delta u} = h_u \lambda_u \Rightarrow \lambda_u = \frac{1}{h_u}\frac{\delta U}{\delta u}$$

$$\frac{\delta U}{\delta v} = h_v \lambda_v \Rightarrow \lambda_v = \frac{1}{h_v}\frac{\delta U}{\delta v}$$

$$\frac{\delta U}{\delta w} = h_w \lambda_w \Rightarrow \lambda_w = \frac{1}{h_w}\frac{\delta U}{\delta w}$$

$$\vec{\nabla}.U = \frac{1}{h_u}\frac{\delta U}{\delta u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\delta U}{\delta v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\delta U}{\delta w}\hat{w}$$

وهي علاقة تدرج الاحداثيات المنحنية

لنستنتج من هذه العلاقة التدرج ديكارتيا و اسطوانيا و كرويا

نعلم أن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

إن $h_u = \left|\frac{\delta\vec{r}}{\delta u}\right|$

و ديكارتيا نعوض كل u **ب** x **فنحصل على:**

$$h_u = \left|\frac{\delta\vec{x}}{\delta x}\right| = 1 \text{ و } \quad h_w = 1 \quad \text{و} h_v = 1$$

وبالتالي فإن التدرج في الاحداثيات المنحنية هو

$$\vec{\nabla}.U = \frac{\delta U}{\delta u}\hat{\imath} + \frac{\delta U}{\delta v}\hat{\jmath} + \frac{\delta U}{\delta w}\hat{k}$$

أما اسطوانيا فنعلم أن

$$\vec{r} = rCOS(\theta)\hat{r} + rSin(\theta)\hat{\theta} + z\hat{k}$$
$$\vec{\nabla}.U = \frac{1}{h_r}\frac{\delta U}{\delta r}\hat{r} + \frac{1}{h_\theta}\frac{\delta U}{\delta \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{h_z}\frac{\delta U}{\delta z}\hat{z}$$

والان لنحسب كل من: h_r **و** h_θ **و** h_z

$$h_r = \left|\frac{\delta\vec{r}}{\delta r}\right| = \left|COS(\theta)\hat{r} + Sin(\theta)\hat{\theta}\right| = \left|\sqrt{COS^2(\theta) + Sin^2(\theta)}\right| = 1$$

$$h_\theta = \left|\frac{\delta\vec{r}}{\delta\theta}\right| = \left|-rSin(\theta)\hat{r} + rCOS(\theta)\hat{\theta}\right| = \left|\sqrt{r^2Sin^2(\theta) + r^2COS^2(\theta)}\right| = r$$

$$h_z = \left|\frac{\delta\vec{r}}{\delta z}\right| = \left|\sqrt{1}\right| = 1$$

وبالتالي فان:

$$\vec{\nabla}.U = \frac{\delta U}{\delta r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\delta U}{\delta \theta}\hat{\theta} + \frac{\delta U}{\delta z}\hat{z}$$

كرويا:

$$\vec{r} = rSin(\theta)COS(\varphi)\hat{r} + rSin(\theta)Sin(\varphi)\hat{\theta} + rCOS(\theta)\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}.U = \frac{1}{h_r}\frac{\delta U}{\delta r}\hat{r} + \frac{1}{h_\theta}\frac{\delta U}{\delta \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{h_\varphi}\frac{\delta U}{\delta \varphi}\hat{\varphi}$$

والان لنحسب كل من: h_r **و** h_θ **و** h_φ

$$h_r = \left|\frac{\delta \vec{r}}{\delta r}\right| = \left|Sin(\theta)COS(\varphi)\hat{r} + Sin(\theta)Sin(\varphi)\hat{\theta} + COS(\varphi)\hat{\varphi}\right|$$
$$= \sqrt{Sin^2(\theta)COS^2(\varphi) + Sin^2(\theta)Sin^2(\varphi) + COS^2(\varphi)} = 1$$

$$h_\theta = \left|\frac{\delta \vec{r}}{\delta \theta}\right| = \left|rCOS(\theta)COS(\varphi)\hat{r} + rCOS(\theta)Sin(\varphi)\hat{\theta} - rSin(\theta)\hat{\varphi}\right|$$
$$= \sqrt{r^2COS^2(\theta)COS^2(\varphi) + r^2COS^2(\theta)Sin^2(\varphi) + r^2Sin^2(\theta)} = r$$

$$h_\varphi = \left|\frac{\delta \vec{r}}{\delta \varphi}\right| = \left|-rSin(\theta)Sin(\varphi)\hat{r} + Sin(\theta)COS(\varphi)\hat{\theta}\right|$$
$$= \sqrt{r^2Sin^2(\theta)Sin^2(\varphi) + r^2Sin^2(\theta)COS^2(\varphi)}$$
$$= r\sqrt{Sin^2(\theta)(Sin^2(\varphi) + COS^2(\varphi))} = r\sqrt{Sin^2(\theta)} = rSin(\theta)$$

$$\vec{\nabla}.U = \frac{\delta U}{\delta r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\delta U}{\delta \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rSin(\theta)}\frac{\delta U}{\delta \varphi}\hat{\varphi}$$

بنفس الطريقة لنوجد التفرق و الدوران و الابلاسيان:

التفرق

بالاحداثيات المنحنية:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{\lambda_u\lambda_v\lambda_w}\left[\frac{\delta(\lambda_u\lambda_v\lambda_w)}{\delta u}+\frac{\delta(\lambda_u\lambda_v\lambda_w)}{\delta v}+\frac{\delta(\lambda_u\lambda_v\lambda_w)}{\delta w}\right]$$

بالاحداثيات الاسطوانية:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[\frac{\delta rf(r)}{\delta r}+\frac{\delta f(\theta)}{\delta\theta}+\frac{\delta rf(z)}{\delta z}\right]$$

بالاحداثيات الكروية:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}=\frac{1}{r^2Sin(\theta)}\left[\frac{\delta r^2Sin(\theta)f(r)}{\delta r}+\frac{\delta rSin(\theta)f(\theta)}{\delta\theta}+\frac{\delta rf(\varphi)}{\delta\varphi}\right]$$

أما الدوران

فيعطى بالاحداثيات المنحنية بالشكل:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\frac{1}{\lambda_u\lambda_v\lambda_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\delta}{\delta u} & \frac{\delta}{\delta v} & \frac{\delta}{\delta w} \\ h_uf(u) & h_vf(v) & h_wf(w) \end{vmatrix}$$

وكرويا فيعطى بالشكل:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\frac{1}{r^2Sin(\theta)}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & rSin(\theta)\hat{\varphi} \\ \frac{\delta}{\delta r} & \frac{\delta}{\delta\theta} & \frac{\delta}{\delta\varphi} \\ f(r) & rf(\theta) & rSin(\theta)f(\varphi) \end{vmatrix}$$

وأخيرا يعطى بالاحداثيات الاسطوانية بالعلاقة:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & k \\ \frac{\delta}{\delta r} & \frac{\delta}{\delta\theta} & \frac{\delta}{\delta z} \\ f(r) & rf(\theta) & f(k) \end{vmatrix}$$

و الان لنوجد اللابلاسيان

في الاحداثيات المنحنية

$$\nabla^2 . U = \frac{1}{\lambda_u\lambda_v\lambda_w}\left[\frac{\delta}{\delta u}\frac{(\lambda_v\lambda_w)}{\lambda_u} + \frac{\delta}{\delta v}\frac{(\lambda_u\lambda_w)}{\lambda_v} + \frac{\delta}{\delta w}\frac{(\lambda_u\lambda_v)}{\lambda_w}\right]$$

أما في الاحداثيات الاسطوانية:

$$\nabla^2 . U = \frac{1}{\mathrm{r}}[\frac{\delta}{\delta r}\frac{r\delta U}{\delta r} + \frac{\delta}{\delta\theta}\frac{\delta U}{r\delta\theta} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{r\delta U}{\delta z}]$$

أما في الاحداثيات الكروية:

$$\nabla^2 . U = \frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\left[\frac{\delta}{\delta r}(r^2 Sin(\theta)\frac{\delta U}{\delta r}) + \frac{\delta}{\delta\theta}(Sin(\theta)\frac{\delta U}{\delta\theta}) + \frac{\delta}{\delta\varphi}(\frac{1}{Sin(\theta)}\frac{\delta U}{\delta\varphi})\right]$$

الوظيفة

ملاحظة: إن هذه الأسئلة جميعها أسئلة دورات ومن المهم حلها جميعها

1. برهن أن $\frac{\vec{r}}{r^3}$ هو شعاع لولبي
2. برهن أن $r.\vec{r}$ شعاعي كروي
3. احسب قيمة $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\ (rln(r))$

4. *برهن أن* $\overrightarrow{F} = r^3.\vec{r}$ حقل شعاعي كموني ثم أوجد كمونه العددي ثم احسب $\nabla^2.U$

5. *احسب* $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\overrightarrow{F})$ و أيضا $\overrightarrow{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\overrightarrow{F})$

6. *بفرض أن:* $\vec{F} = x^3\vec{\imath} + y^3\vec{\jmath} + z^3\vec{k}$

برهن أن $\vec{F}$ كموني ثم احسب كمونه العددي

7. *عين قيمة الثوابت* a, b, c ليكون التابع الشعاع

$$\vec{F} = (x + 2y + az)\vec{\imath} + (x + y^2 + bz)\vec{\jmath} + (cy + z)\vec{k}$$

8. إذا كان :

$$U = \left(r + \frac{1}{r^2}\right) COS(\theta)\ Sin(\varphi)$$

احسب كلا من: $\overrightarrow{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}.\overrightarrow{F})$ و $\nabla^2.U$ و $\vec{\nabla}.U$

9. بفرض أن:

$$\vec{F} = rcos(\theta)\hat{r} + rSin(\theta)\hat{\theta} + z\vec{k}$$

حقلا شعاعيا موضعيا معطى بالاحداثيات الاسطوانية هل $\vec{F}$ لولبي؟؟

10. احسب المشتق الموجه للتابع

$$U(u, v, w) = x^2yz + 4xz$$

في $M(1,2,1)$

وباتجاه $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$